MODEL MATEMATIKA ESTIMASI KUALITAS FERMENTASI *TAPAI* SINGKONG DENGAN PERSAMAAN LOGISTIK

Andi Susanto[1], Vinia Aprillia[2], Asyfa Ummi Silti[3], Yulia Citra[4]

[1,2,3,4]*Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang*
E-mail : [1]andisusanto@uinib.ac.id, [2]viniaaprilia7@gmail.com, [3]asyfaaslt@gmail.com, [4]2004yuliacitra@gmail.com

ABSTRACT

Cassava tapai is one of the traditional fermented food products widely consumed by the community due to its distinctive flavor and increased nutritional value following the fermentation process. The quality of tapai is influenced by the amount of yeast, cassava mass, and fermentation duration, causing producers to frequently experience difficulties in determining the appropriate fermentation time to achieve the desired quality. This study aims to develop a mathematical model capable of estimating the fermentation quality of cassava tapai while simultaneously determining the fermentation duration required to reach a specific quality level. The approach used is a logistic differential equation, with the fermentation rate modeled as a function of the ratio of yeast mass to cassava mass. The model yields an explicit function of quality over time: $Y(t) = \frac{2{,}804}{1+1{,}804.e^{-90{,}284.\frac{R}{S}.t}}$. and for estimating fermentation duration: : $T(Y) = -\frac{S}{90{,}284.R}.In\left[\frac{2{,}804-Y}{1{,}804\,Y}\right]$. Simulations based on three real production scales (22 kg, 64 kg, and 200 kg of cassava per day) showed that a 0.5% yeast dose failed to produce fully mature tapai ($Y \geq 2.50$) within the safe fermentation window of $2-4$ days, while a 1.5% dose achieved it within 2 days but risked quality decline if not harvested promptly. A 1.0% dose proved most stable, yielding fully mature tapai ($Y = 2.503$) at day 3. The inverse model confirmed that a 0.5% dose requires 6 days to reach $Y = 2.50$, exceeding the safe fermentation limit. Therefore, the minimum recommended dose is 1.0% yeast with a fermentation duration of 3 days across all production scales.

Keywords : *Mathematical Modeling, Logistic Differential Equation, Tapai Fermentation, Time Estimation, Tapai Quality*

ABSTRAK

Tapai singkong merupakan salah satu produk pangan fermentasi tradisional yang banyak dikonsumsi masyarakat karena cita rasanya yang khas serta nilai gizinya yang meningkat setelah proses fermentasi. Kualitas *Tapai* dipengaruhi oleh jumlah ragi, massa singkong, dan lama fermentasi, sehingga produsen sering mengalami kesulitan dalam menentukan lama fermentasi yang tepat untuk mencapai kualitas yang diinginkan. Penelitian ini bertujuan membangun model matematika untuk mengestimasi kualitas fermentasi *Tapai* singkong sekaligus menentukan lama waktu fermentasi yang dibutuhkan untuk mencapai tingkat kualitas tertentu. Pendekatan yang digunakan adalah persamaan diferensial logistik, dengan laju fermentasi dimodelkan sebagai fungsi rasio jumlah ragi terhadap massa singkong. Penyelesaian model menghasilkan fungsi kualitas terhadap waktu: $Y(t) = \frac{2{,}804}{1+1{,}804.e^{-90{,}284.\frac{R}{S}.t}}$ dan untuk estimasi waktu fermentasi: $T(Y) = -\frac{S}{90{,}284.R}.In\left[\frac{2{,}804-Y}{1{,}804\,Y}\right]$. Simulasi perlakuan pada tiga skala produksi riil (22 kg, 64 kg, dan 200 kg singkong per hari) menunjukkan bahwa dosis 0,5% tidak mampu menghasilkan *Tapai* sangat matang ($Y \geq 2{,}50$) dalam rentang waktu aman $2-4$ hari, sedangkan dosis 1,5% mencapainya dalam 2 hari namun berisiko penurunan kualitas jika tidak segera dipanen. Dosis 1,0% terbukti paling stabil, menghasilkan *Tapai* sangat matang ($Y = 2{,}503$) pada hari ke-3. Model invers membuktikan dosis 0,5% memerlukan 6 hari untuk mencapai $Y = 2{,}50$, melampaui batas aman fermentasi, sehingga dosis minimum yang direkomendasikan adalah 1,0% dengan lama fermentasi 3 hari untuk seluruh skala produksi.

Kata Kunci : *Pemodelan Matematika, Persamaan Diferensial Logistik, Fermentasi Tapai, Estimasi Waktu, Kualitas Tapai*

PENDAHULUAN

Tapai singkong merupakan salah satu produk pangan fermentasi tradisional yang banyak dikonsumsi masyarakat Indonesia karena cita rasanya yang khas, manis, sedikit asam, dan beraroma alkohol ringan. Kualitas *Tapai* singkong sangat dipengaruhi oleh mutu ragi, lama fermentasi, serta jenis singkong yang digunakan, sehingga ketiga faktor tersebut harus sesuai dengan kebutuhan proses fermentasi untuk menghasilkan *Tapai* berkualitas baik (Nurjannah & Nurhikmah, 2020). Selain digemari karena rasanya, *Tapai* singkong juga dikonsumsi karena nilai gizinya yang meningkat signifikan setelah proses fermentasi dibandingkan singkong mentah.

Dari aspek gizi, setiap 100 gram *Tapai* singkong mengandung sekitar 169 kkal energi, 1,4 gram protein, 0,3 gram lemak, 40,2 gram karbohidrat, 2 gram serat, 21 mg kalsium, 34 mg fosfor, 0,8 mg zat besi, dan 9 mg vitamin C. Kandungan vitamin pada singkong, termasuk vitamin C dan vitamin B12, dinilai meningkat berkat proses fermentasi, sedangkan *Tapai* juga mengandung probiotik yang bermanfaat bagi kesehatan sistem pencernaan dan termasuk pangan dengan indeks glikemik rendah. Peningkatan nilai gizi inilah yang menjadikan *Tapai* singkong tidak sekadar camilan tradisional, tetapi juga pangan fungsional yang relevan untuk dikaji secara ilmiah, termasuk dari sisi optimalisasi proses produksinya.

Proses fermentasi *Tapai* melibatkan aktivitas mikroorganisme dalam ragi secara berurutan. Mikroorganisme utama yang berperan adalah *Amylomyces rouxii*, yang menghasilkan enzim amilase untuk menghidrolisis pati menjadi maltosa dan glukosa, serta *Saccharomyces cerevisiae*, yang memfermentasi gula tersebut menjadi etanol dan karbon dioksida melalui jalur fermentasi alkohol (Laela dkk., 2023). Rangkaian reaksi biokimia inilah yang membentuk karakteristik akhir *Tapai*, baik dari segi tekstur, rasa, aroma, maupun tingkat kematangan, sekaligus menjadi dasar peningkatan nilai gizi dan daya cernanya dibandingkan singkong segar (Winarno, 2004; Muchtadi & Sugiyono, 2013).

Karakteristik mutu *Tapai* sangat ditentukan oleh dua variabel utama, yaitu jumlah ragi dan lama waktu fermentasi, dengan massa singkong sebagai substrat turut berperan melalui rasio terhadap jumlah ragi. Penambahan konsentrasi ragi yang terlalu berlebih akan menghasilkan rasa *Tapai* menjadi pahit dan relatif lebih cepat mengalami pembusukan, sebaliknya jika penambahan ragi terlalu sedikit akan membuat proses fermentasi melambat (Hasthini dkk., 2024). Hasil penelitian eksperimental menunjukkan bahwa konsentrasi ragi berpengaruh nyata terhadap kadar air dan organoleptik *Tapai* singkong, sedangkan lama fermentasi berpengaruh nyata terhadap kadar air, kadar glukosa, dan organoleptik *Tapai* singkong (Sahratullah dkk., 2017). Dengan kata lain, lama fermentasi (t) bukan sekadar variabel waktu biasa, melainkan parameter kunci yang menentukan apakah *Tapai* akan berada pada kondisi belum matang, matang, atau bahkan terlalu matang.

Dalam praktiknya, produsen *Tapai*—baik skala rumah tangga maupun industri kecil—umumnya menentukan lama fermentasi hanya berdasarkan pengalaman dan perkiraan, tanpa acuan kuantitatif yang jelas mengenai berapa lama waktu yang sebenarnya dibutuhkan untuk mencapai kualitas tertentu pada kombinasi ragi dan singkong yang digunakan. Sejumlah penelitian telah menggunakan variasi konsentrasi ragi dan waktu fermentasi sebagai dua faktor utama, dengan parameter analisis meliputi nilai pH, kadar alkohol, dan mutu organoleptik (Fiona dkk., 2024), namun pendekatan tersebut bersifat deskriptif-eksperimental dan belum mampu menjawab secara langsung berapa lama fermentasi yang dibutuhkan untuk mencapai target kualitas tertentu. Kesenjangan inilah yang menjadi celah penting untuk dijembatani melalui pendekatan matematis.

Pemodelan matematika menjadi solusi yang relevan karena mampu menerjemahkan hubungan antarvariabel proses fermentasi ke dalam bentuk fungsi yang dapat dihitung secara langsung, baik untuk memprediksi hasil maupun untuk menentukan input yang dibutuhkan. Sebagaimana dikemukakan bahwa pemodelan matematika merupakan suatu alat yang digunakan oleh matematikawan dalam memahami perilaku atau fenomena alam dengan bahasa simbol, dan pemodelan matematika dengan menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinear hampir tak dapat dihindarkan, terutama untuk menggambarkan laju perubahan yang dipengaruhi waktu (Susanto & Rudianto, 2020). Studi pemodelan matematika fermentasi alkohol pada tapai singkong telah menunjukkan bahwa reaksi fermentasi dapat direpresentasikan melalui persamaan matematika yang menghubungkan parameter proses dengan hasil fermentasi (Rofi'i dkk., 2022). Lebih lanjut, model logistik telah digunakan secara luas untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan mikroorganisme dan produksi metabolit dalam sistem fermentasi, karena kemampuannya merepresentasikan pola pertumbuhan yang meningkat pada fase awal dan mencapai titik jenuh pada kondisi tertentu (González-Figueredo dkk., 2025), sehingga sesuai untuk menggambarkan perilaku kualitas *Tapai* yang meningkat secara bertahap hingga mencapai titik optimum.

Model logistik berbentuk persamaan diferensial $\frac{dY}{dt} = kY\left(1 - \frac{Y}{K}\right)$ memungkinkan dua arah pemanfaatan sekaligus: pertama, memprediksi skor kualitas Y pada waktu fermentasi t tertentu; dan kedua—yang menjadi penekanan utama penelitian ini—menentukan secara terbalik berapa lama waktu fermentasi t yang dibutuhkan untuk mencapai suatu target kualitas Y yang diinginkan, melalui bentuk invers:

$$T(Y) = -\frac{S}{k_0.R}.In\left[\frac{Y_0(K-Y)}{Y(K-Y_0)}\right]$$

Dengan demikian, model bukan hanya menjadi alat estimasi kualitas, tetapi juga alat estimasi waktu produksi *Tapai* berdasarkan target hasil yang ditentukan oleh produsen.

Hingga saat ini, penelitian yang secara eksplisit menyusun model matematis untuk mengestimasi waktu fermentasi optimal berdasarkan target kualitas *Tapai* singkong masih sangat terbatas; sebagian besar penelitian terdahulu masih bersifat deskriptif eksperimental tanpa formulasi kuantitatif yang dapat digeneralisasi. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk: (1) memformulasikan model matematika berbasis persamaan diferensial logistik yang merepresentasikan dinamika kualitas fermentasi *Tapai* singkong terhadap waktu; (2) menurunkan bentuk invers model untuk mengestimasi lama waktu fermentasi yang dibutuhkan guna mencapai target kualitas tertentu; dan (3) mengevaluasi keakuratan model melalui validasi terhadap data empiris dari penelitian terdahulu mengenai pengaruh ragi, massa singkong, dan lama fermentasi terhadap hasil organoleptik *Tapai* singkong.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian pemodelan matematika terapan dengan pendekatan analitik-kuantitatif. Metode yang digunakan adalah studi kepustakaan (*library research*) yang dikombinasikan dengan konstruksi model matematis. Pendekatan dilakukan secara deduktif, yaitu dimulai dari identifikasi fenomena, pembentukan asumsi, konstruksi persamaan diferensial, penyelesaian analitik (baik bentuk langsung Y(t) maupun bentuk invers t(Y)), penentuan parameter, hingga simulasi prediksi (Iswanto, 2012; Blanchard dkk., 2011).

Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari hasil penelitian terdahulu yang telah dipublikasikan dalam jurnal ilmiah. Kriteria pemilihan data adalah penelitian yang memuat kombinasi variabel berupa konsentrasi atau massa ragi, massa singkong, dan lama fermentasi, serta menyertakan hasil pengukuran kualitas organoleptik *Tapai* singkong yang mencakup parameter rasa, tekstur, dan aroma.

Variabel-variabel yang digunakan dalam model ini didefinisikan sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel variabel Model

Simbol	Definisi	Satuan
$Y(t)$	Skor kualitas fermentasi *Tapai* (tingkat kematangan)	Skala 1–3
t	Waktu fermentasi	Hari
R	Massa ragi yang digunakan	Gram
S	Massa singkong sebagai substrat	Gram
k_0	Konstanta laju fermentasi dasar	$Hari^{-1}$
K	Kapasitas kualitas maksimum	Skala 1–3
Y_0	Nilai kualitas awal pada $t = 0$	Skala 1–3
$t(Y)$	Estimasi waktu fermentasi yang dibutuhkan untuk mencapai target kualitas Y	Hari

Variabel output utama $Y(t)$ diinterpretasikan menggunakan skala kematangan berikut (Sahratullah dkk., 2017):

1. $1{,}0 \leq Y < 1{,}5$: *Tapai* belum matang (tekstur keras, rasa tidak manis)
2. $1{,}5 \leq Y < 2{,}5$: *Tapai* cukup matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
3. $2{,}5 \leq Y \leq 3{,}0$: *Tapai* sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)

Asumsi Model

Pembentukan model dilakukan dengan menetapkan asumsi-asumsi berikut:

1. Proses fermentasi berlangsung pada kondisi anaerob dengan suhu ruang yang dianggap konstan (sekitar $26 - 30°C$), sehingga pengaruh suhu tidak dimodelkan secara eksplisit.
2. Skor kualitas *Tapai* $Y(t)$ meningkat secara kontinu dari nilai awal Y_0 dan mendekati nilai jenuh K seiring bertambahnya waktu, mengikuti pola pertumbuhan logistik.
3. Laju fermentasi dipengaruhi secara proporsional oleh rasio massa ragi terhadap massa singkong $\frac{R}{S}$, sehingga semakin besar rasio tersebut maka proses kematangan berlangsung semakin cepat.
4. Nilai kapasitas maksimum K bersifat tetap dan hanya mencerminkan batas kualitas optimum yang dapat dicapai sistem fermentasi, tidak dipengaruhi oleh jumlah ragi maupun massa singkong.
5. Kondisi awal ditetapkan $Y_0 = 1{,}0$, yang merepresentasikan kondisi singkong sebelum mengalami proses kematangan fermentatif yang signifikan.
6. Model bersifat dapat dibalik (invertible) pada rentang $0 < Y_0 < Y < K$, sehingga fungsi $t(Y)$ terdefinisi dengan baik untuk keperluan estimasi waktu.
7. Model berlaku untuk rentang waktu fermentasi $t \in [0, 5]$ hari, sesuai dengan rentang praktik fermentasi *Tapai* pada umumnya (Nurjannah & Nurhikmah, 2020; Sahratullah dkk., 2017).

Model yang Diusulkan

Berdasarkan karakteristik proses fermentasi yang bersifat tumbuh-jenuh (*growth-saturation*), model matematika yang diusulkan mengadopsi bentuk persamaan diferensial logistik

yang dimodifikasi dengan mempertimbangkan pengaruh rasio ragi terhadap singkong sebagai penentu laju fermentasi (Rofi'i dkk., 2022):

$$\frac{dY}{dt} = k_0 . \frac{R}{S} . Y\left(1 - \frac{Y}{K}\right)$$

Model ini akan diselesaikan secara analitik dalam dua bentuk pada bagian Hasil dan Pembahasan, yaitu:

1. Bentuk langsung $Y(t)$ — untuk mengestimasi skor kualitas *Tapai* pada waktu fermentasi tertentu.
2. Bentuk invers $t(Y)$ — untuk mengestimasi lama waktu fermentasi yang dibutuhkan guna mencapai target kualitas tertentu, diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $Y(t)$ terhadap variabel t.

Tahapan analisis yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi:

1. **Penyelesaian analitik** persamaan diferensial logistik menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variables*) untuk memperoleh solusi eksplisit $Y(t)$.
2. **Penurunan bentuk invers** $t(Y)$ dari solusi $Y(t)$ melalui manipulasi aljabar dan logaritma, sehingga model dapat digunakan untuk dua arah estimasi.
3. **Estimasi parameter** k_0 dan K menggunakan metode kuadrat terkecil nonlinear (*nonlinear least squares*) berdasarkan data empiris dari literatur.
4. **Konversi skor organoleptik** dari skala hedonik sumber data ke skala standar model (1–3) menggunakan normalisasi linear.
5. **Validasi model** dengan menghitung Mean Absolute Percentage Error (MAPE) dan koefisien determinasi (R^2) antara nilai prediksi dan data observasi, baik untuk bentuk $Y(t)$ maupun $t(Y)$.
6. **Simulasi prediksi** kualitas *Tapai* dan estimasi waktu fermentasi pada berbagai kombinasi input $R, S, t,$ dan target Y untuk menghasilkan tabel acuan praktis bagi produksi.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Proses fermentasi *Tapai* singkong secara biologis menunjukkan pola perubahan kualitas yang tidak bersifat linear terhadap waktu. Pada tahap awal fermentasi, peningkatan kualitas berlangsung relatif lambat karena mikroorganisme dalam ragi masih berada pada fase adaptasi. Memasuki fase eksponensial, aktivitas enzim amilase dan *Saccharomyces cerevisiae* meningkat pesat sehingga hidrolisis pati dan konversi glukosa menjadi alkohol berlangsung intensif, yang tercermin pada peningkatan skor kualitas organoleptik secara signifikan. Selanjutnya, laju peningkatan kualitas melambat ketika substrat mulai habis dan produk fermentasi mulai menghambat aktivitas mikroorganisme itu sendiri (Laela dkk., 2023; Sahratullah dkk., 2017).

Model matematika yang diusulkan adalah:

$$\frac{dY}{dt} = k_0 . \frac{R}{S} . Y\left(1 - \frac{Y}{K}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

dengan syarat awal:

$$Y(0) = Y_0 = 1{,}0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Keterangan:

- $Y(t)$ = skor kualitas fermentasi *Tapai* pada waktu t (skala 1–3)
- t = lama waktu fermentasi (hari)

- R = massa ragi yang digunakan (gram)
- S= massa singkong sebagai substrat (gram)
- k_0 = konstanta laju fermentasi dasar (hari^{-1}), nilai tetap yang tidak bergantung pada perlakuan
- K= kapasitas kualitas maksimum atau nilai jenuh sistem (skala 1–3)
- Y_0 = nilai kualitas awal pada saat $t = 0$

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial separabel. Penyelesaian dilakukan dengan metode pemisahan variabel (Boyce & DiPrima, 2017).

Langkah 1 — Pemisahan variabel

$$\frac{dY}{Y\left(1-\frac{Y}{K}\right)} = k_0.\frac{R}{S}dt \quad \ldots\ldots (3)$$

Langkah 2 — Dekomposisi pecahan parsial

$$\frac{1}{Y\left(1-\frac{Y}{K}\right)} = \frac{1}{Y} + \frac{1}{K-Y} \quad \ldots\ldots (4)$$

Langkah 3 — Integrasi kedua ruas

$$In|Y| - In|K-Y| = k_0.\frac{R}{S}.t + C_1 \quad \ldots\ldots (5)$$

$$In\left|\frac{Y}{K-Y}\right| = k_0.\frac{R}{S}.t + C_1 \quad \ldots\ldots (6)$$

Langkah 4 — Penyelesaian eksplisit

$$\frac{Y}{K-Y} = A\,.e^{k_0\frac{R}{S}t}, A = e^{C_1} \quad \ldots\ldots (7)$$

Langkah 5 — Penerapan syarat awal

$$A = \frac{Y_0}{K-Y_0} \quad \ldots\ldots (8)$$

Langkah 6 — Solusi akhir bentuk langsung

$$Y(t) = \frac{K\,.Y_0}{Y_0 + (K-Y_0)e^{-k_0\frac{R}{S}t}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Keterangan: $Y(t)$ menyatakan estimasi skor kualitas *Tapai* pada waktu fermentasi t, sebagai fungsi dari massa ragi R, massa singkong S, serta parameter terkalibrasi $k_0$dan K.

Penurunan Bentuk Invers (Estimai Waktu Fermentasi)

Langkah 1 — Mulai dari persamaan (9)

$$Y(t) = \frac{K\,.Y_0}{Y_0 + (K-Y_0)e^{-k_0\frac{R}{S}t}}$$

Langkah 2 — Kalikan silang

$$Y\left[Y_0 + (K-Y_0)e^{-k_0\frac{R}{S}t}\right] = K.Y_0$$

$$Y.Y_0 + Y(K-Y_0)e^{-k_0\frac{R}{S}t} = K.Y_0 \quad \ldots\ldots (10)$$

Langkah 3 — Isolasi suku eksponensial

$$Y(K-Y_0)e^{-k_0\frac{R}{S}t} = K.Y_0 - Y.Y_0 = Y_0(K-Y) \quad \ldots\ldots (11)$$

$$e^{-k_0\frac{R}{S}t} = \frac{Y_0(K-Y)}{Y(K-Y_0)} \quad \ldots\ldots (12)$$

Langkah 4 — Logaritma natural kedua ruas

$$-k_0\frac{R}{S}t = In\left[\frac{Y_0(K-Y)}{Y(K-Y_0)}\right] \quad \ldots\ldots (13)$$

Langkah 5 — Solusi akhir bentuk invers

$$T(Y) = -\frac{S}{k_0.R}.In\left[\frac{Y_0(K-Y)}{Y(K-Y_0)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Keterangan:

- $t(Y)$ = estimasi lama waktu fermentasi (hari) yang dibutuhkan untuk mencapai target kualitas Y
- Y = target skor kualitas yang ingin dicapai (skala 1–3), dengan syarat $Y_0 < Y < K$
- $\frac{S}{R}$ = rasio massa singkong terhadap massa ragi; semakin besar rasio ini (semakin sedikit ragi relatif terhadap singkong), semakin lama waktu yang dibutuhkan
- Tanda negatif pada persamaan menjadi positif secara otomatis karena nilai di dalam logaritma berada pada rentang $(0,1)$, sehingga $In(.)$ bernilai negative.

Estimasi Parameter Model

Parameter k_0 dan Kdiestimasi dengan meminimalkan jumlah kuadrat selisih antara prediksi model dan data observasi:

$$\lim_{k_0,K} i + 1n\left[Y_i - \frac{K.Y_0}{Y_0 + (K-Y_0)e^{-k_0\left(\frac{R}{S}\right)i^{t_i}}}\right]^2 \quad \ldots\ldots (15)$$

Berdasarkan prosedur estimasi (*nonlinear least squares*) terhadap data empiris (Sahratullah dkk., 2017; Nurjannah & Nurhikmah, 2020), diperoleh nilai parameter:

$$k_0 = 90{,}284\ hari^{-1},\ K = 2{,}804$$

Keterangan: Nilai $k_0 = 90{,}284$ menunjukkan laju intrinsik peningkatan kualitas pada rasio $R/S = 1\%$ sedangkan $K = 2{,}804$ menunjukkan batas kualitas tertinggi yang secara teoritis dapat dicapai *Tapai* singkong (mendekati namun tidak pernah mencapai skor sempurna 3,00), akibat adanya faktor pembatas alami seperti penumpukan metabolit hasil fermentasi (Sahratullah dkk., 2017).

Dengan parameter ini, model terkalibrasi menjadi:

$$Y(t) = \frac{2{,}804}{1 + 1{,}804.e^{-90{,}284.\frac{R}{S}.t}} \quad \ldots\ldots (16)$$

$$T(Y) = -\frac{S}{90{,}284.R}.In\left[\frac{2{,}804 - Y}{1{,}804\ Y}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Validasi Model dilakukan dengan menghitung ***Mean Absolute Percentage Error*** **(MAPE):**

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{Y_i - \widehat{Y_i}}{Y_i}\right| \times 100\% \quad \ldots\ldots (18)$$

dan **koefisien determinasi (R^2):**

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} \quad \ldots\ldots (19)$$

Keterangan: Y_i adalah nilai observasi, $\hat{Y}_i$ adalah nilai prediksi model, $\bar{Y}$ adalah rata-rata nilai observasi, dan n adalah jumlah data. Hasil perhitungan terhadap data empiris menghasilkan:

$$MAPE = 9{,}58\ \%, R^2 = 0{,}809$$

Nilai MAPE masih berada di bawah ambang batas 10% sehingga model dinyatakan layak digunakan, meskipun R^2 menunjukkan model menjelaskan sekitar 81% variansi data — lebih rendah dibandingkan kalibrasi sebelumnya karena perubahan basis satuan R/S. Nilai k_0 yang besar (90,284) merupakan konsekuensi matematis dari R/S yang sangat kecil (berkisar $0{,}005 - 0{,}015$), sehingga hasil kali keduanya tetap berada pada orde yang wajar.

Simulasi Prediksi Kualitas dan Estimasi Waktu Fermentasi

a. Prediksi Kualitas $Y(t)$

Tabel 2. Hasil simulasi prediksi kualitas *Tapai* singkong berdasarkan model persamaan (16)

No.	$S(Kg)$	Dosis	R (kg)	$t\ (hari)$	$\hat{Y}(t)$	Interpretasi Kualitas
1.	22	0,5 %	0,110	2	1,619	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
2.	22	0,5 %	0,110	3	1,913	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
3.	22	0,5 %	0,110	4	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
4.	22	1,0 %	0,220	2	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
5.	22	1,0 %	0,220	3	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
6.	22	1,0 %	0,220	4	2,673	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
7.	22	1,5 %	0,330	2	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
8.	22	1,5 %	0,330	3	2,719	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
9.	22	1,5 %	0,3330	4	2,781	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
10.	64	0,5 %	0,320	2	1,619	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
11.	64	0,5 %	0,320	3	1,913	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
12.	64	0,5 %	0,320	4	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
13.	64	1,0 %	0,640	2	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
14.	64	1,0 %	0,640	3	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)

15.	64	1,0 %	0,640	4	2,673	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
16.	64	1,5 %	0,960	2	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
17.	64	1,5 %	0,960	3	2,719	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
18.	64	1,5 %	0,960	4	2,781	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
19	200	0,5 %	1,000	2	1,619	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
20.	200	0,5 %	1,000	3	1,913	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
21.	200	0,5 %	1,000	4	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
22.	200	1,0 %	2,000	2	2,163	Cukup Matang (tekstur agak lunak, rasa mulai manis)
23.	200	1,0 %	2,000	3	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
24.	200	1,0 %	2,000	4	2,673	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
25.	200	1,5 %	3,000	2	2,503	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
26.	200	1,5 %	3,000	3	2,179	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)
27.	200	1,5 %	3,000	4	2,781	sangat matang (tekstur lunak, rasa manis, aroma khas)

Analisis Tabel Prediksi Kualitas

Berdasarkan Tabel 3, hasil simulasi menunjukkan pola yang konsisten dan dapat diinterpretasikan secara praktis. Pada dosis 0,5%, meskipun waktu fermentasi diperpanjang hingga 4 hari, prediksi kualitas hanya mencapai $Y = 2{,}163$ (cukup matang) dan tidak pernah menyentuh kategori sangat matang ($Y \geq 2{,}50$) dalam rentang waktu aman $2 - 4$ hari. Hal ini sejalan dengan temuan Fahmi & Nurrahman (2011) yang menyatakan proses fermentasi *Tapai* membutuhkan waktu 2–3 hari dengan konsentrasi yang tepat untuk menghasilkan *Tapai* berasa khas, manis, sedikit asam, dan beraroma alkohol. Dengan kata lain, dosis ragi yang terlalu rendah tidak dapat dikompensasi sekadar dengan memperpanjang waktu fermentasi dalam batas waktu yang aman.

Sebaliknya, dosis 1,5% mampu mencapai kategori sangat matang ($Y = 2{,}503$) hanya dalam 2 hari pada semua skala produksi, namun nilai Y terus meningkat hingga $2{,}781$ pada hari ke-4. Perlu diwaspadai bahwa fermentasi yang terlalu lama (5 hari ke atas) menghasilkan *Tapai* berwarna kuning, rasa asam dan sedikit pahit, tekstur terlalu lunak, serta aroma terlalu kecut dengan kadar alkohol sangat tinggi (Azzahra dkk., 2023), sehingga dosis 1,5% pada hari ke-3 hingga ke-4 sudah berada di ambang risiko penurunan kualitas apabila tidak segera dipanen. Sementara itu, dosis 1,0% menghasilkan kualitas sangat matang ($Y = 2{,}503$) tepat pada hari ke-3, dan meningkat menjadi $Y = 2{,}673$ pada hari ke-4 — masih dalam kategori sangat matang dan

masih dalam rentang waktu aman, menjadikan dosis ini paling stabil dan konsisten (Nurjannah & Nurhikmah, 2020; Sahratullah dkk., 2017)

b. Estimasi Waktu Fermentasi $T(Y)$

Tabel 3. Hasil simulasi prediksi kualitas *Tapai* singkong berdasarkan model persamaan (17)

No.	$S(Kg)$	Dosis	R (kg)	Target Y	$t(Y)$ (hari)	Interpretasi Kualitas
1.	22	0,5 %	0,110	1,50	2	Cukup Matang
2.	22	0,5 %	0,110	2,00	4	Cukup Matang
3.	22	0,5 %	0,110	2,50	6	Di luar rentang aman
4.	22	1,0 %	0,220	1,50	2	Cukup Matang
5.	22	1,0 %	0,220	2,00	2	Cukup matang
6.	22	1,0 %	0,220	2,50	3	Sangat matang
7.	22	1,5 %	0,330	1,50	2	Cukup Matang
8.	22	1,5 %	0,330	2,00	2	Cukup matang
9.	22	1,5 %	0,3330	2,50	2	Sangat matang
10.	64	0,5 %	0,320	1,50	2	Cukup Matang
11.	64	0,5 %	0,320	2,00	4	Cukup matang
12.	64	0,5 %	0,320	2,50	6	Di luar rentang aman
13.	64	1,0 %	0,640	1,50	2	Cukup Matang
14.	64	1,0 %	0,640	2,00	2	Cukup matang
15.	64	1,0 %	0,640	2,50	3	Sangat Matang
16.	64	1,5 %	0,960	1,50	2	Cukup Matang
17.	64	1,5 %	0,960	2,00	2	Cukup matang
18.	64	1,5 %	0,960	2,50	2	Sangat matang
19	200	0,5 %	1,000	1,50	2	Cukup Matang
20.	200	0,5 %	1,000	2,00	4	Cukup matang
21.	200	0,5 %	1,000	2,50	5	Di luar rentang aman
22.	200	1,0 %	2,000	1,50	2	Cukup Matang
23.	200	1,0 %	2,000	2,00	2	Cukup matang
24.	200	1,0 %	2,000	2,50	3	Sangat matang
25.	200	1,5 %	3,000	1,50	2	Cukup Matang
26.	200	1,5 %	3,000	2,00	2	Cukup matang
27.	200	1,5 %	3,000	2,50	2	Sangat matang

Analisis Tabel Estimasi Waktu

Tabel 5 memberikan informasi yang lebih tajam: **dosis 0,5% secara kuantitatif terbukti tidak mampu menghasilkan *Tapai* sangat matang dalam rentang waktu fermentasi yang aman.** Model memprediksikan dibutuhkan 6 hari untuk mencapai Y = 2,50 pada dosis 0,5% — jauh melampaui batas aman 4 hari, di mana pada kondisi tersebut *Tapai* sudah berisiko menghasilkan rasa asam berlebih dan aroma menyimpang. Ini menegaskan bahwa fermentasi *Tapai* dalam rentang waktu 3 sampai 5 hari menghasilkan kualitas organoleptik terbaik, dan setelah melewati hari kelima terjadi penurunan akibat penumpukan metabolit seperti alkohol dan asam organik yang menghambat pertumbuhan.

Pembahasan Hasil Simulasi

Berdasarkan Tabel 2, Tabel 3, dan data riil skala produksi, berikut rekomendasi konkret untuk masing-masing golongan produsen:

Tabel 4. Rekomendasi dosis ragi dan waktu fermentasi optimal per skala produksi untuk menghasilkan *Tapai* sangat matang ($2,5 \leq Y \leq 3,0$)

No.	Skala	$S(Kg)$ *per produksi*	Dosis Optimal	Kebutuhan Ragi (gram)	Waktu Optimal	$\hat{Y}$ yang dicapai
1.	Kecil (Rumah Tangga)	22	1,0 %	220	3 hari	2,503
2.	Sedang (UMKM)	64	1,0 %	640	3 hari	2,503
3.	Besar (UMKM Berkembang)	200	1,0 %	2.000	3 hari	2,503

Pedoman umum yang berlaku untuk semua skala:

Kebutuhan ragi (gram) = **1,0% (10 gram/kg singkong)**

Waktu fermentasi optimal = 3 hari

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil membangun model matematika berbasis persamaan diferensial logistik untuk mengestimasi kualitas fermentasi *Tapai* singkong, dengan dua bentuk solusi analitik yaitu bentuk langsung $Y(t)$ untuk memprediksi kualitas dan bentuk invers $t(Y)$ untuk menentukan waktu fermentasi optimal. Parameter model yang diperoleh adalah $k_0 = 90{,}284$ hari^{-1} dan $K = 2{,}804$, dengan tingkat akurasi MAPE = 9,58% dan $R^2 = 0{,}809$ yang dinyatakan layak. Simulasi terhadap 27 kombinasi perlakuan berbasis data riil tiga skala produksi (22 kg, 64 kg, dan 200 kg/hari) menunjukkan bahwa kualitas *Tapai* hanya ditentukan oleh rasio R/S, bukan skala massa absolut. Rekomendasi optimal untuk seluruh skala produksi adalah dosis ragi **1,0% (10 gram/kg singkong)** dengan lama fermentasi **3 hari** untuk menghasilkan *Tapai* sangat matang $(\hat{Y} = 2{,}503)$ atau dosis **1,5% selama 2 hari** untuk kondisi produksi mendesak. Dosis 0,5% tidak direkomendasikan apabila target kualitas sangat matang karena membutuhkan waktu 6 hari yang melampaui batas aman fermentasi *Tapai*.

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model yang memuat suku penghambatan (*inhibition term*) agar penurunan kualitas *Tapai* pasca hari ke-4 dapat dimodelkan, serta melakukan validasi menggunakan data primer eksperimental dengan variasi suhu, jenis singkong, dan jenis ragi yang lebih beragam guna meningkatkan akurasi dan generalisabilitas model.

DAFTAR PUSTAKA

Afrianto, S., & Wariyah, C. (2020). Karakteristik growol yang dibuat dengan variasi varietas ubi kayu (*Manihot esculenta* Crantz) dan lama fermentasi. *agriTECH*, *40*(3), 254.

Anggreini, D. (2018). Penerapan persamaan diferensial Verhulst dalam menentukan proyeksi penduduk di Kabupaten Tulungagung. *Jurnal Fourier*, *7*(2), 87–102. https://doi.org/10.14421/fourier.2018.72.87-102

Azzahra, U., Julita, W., & Achyar, A. (2023). Pengaruh lama fermentasi dalam pembuatan tape singkong (*Manihot utilissima*). *Prosiding Seminar Nasional Biologi UIN Syarif Hidayatullah Jakarta*.

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2011). *Differential equations* (4th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (11th ed.). John Wiley & Sons.

Buckle, K. A., Edwards, R. A., Fleet, G. H., & Wootton, M. (2009). *Ilmu pangan* (Terjemahan H. Purnomo & Adiono). UI Press.

Desrosier, N. W. (1988). *The technology of food preservation*. AVI Publishing Company.

Fahmi, N., & Nurrahman. (2011). Kadar glukosa, alkohol dan citarasa tape onggok berdasarkan lama fermentasi. *Jurnal Pangan dan Gizi*, *2*(3), 25–42.

Fiona, A. S., Ega, N., & B. D. (2024). Pengaruh ragi dan lama fermentasi terhadap mutu kimia dan organoleptik pada tape biji barley. *JASATHP: Jurnal Sains dan Teknologi Hasil Pertanian*, *4*(2), 77–86. https://doi.org/10.55678/jasathp.v4i2.1688

González-Figueredo, C., Mestre Furlani, M. V., & Ortiz, O. A. (2025). Fermentation kinetics beyond viability: A fitness-based framework for microbial modeling. *Processes*, *13*(9), 3018. https://doi.org/10.3390/pr13093018

Hasthini, Z., Wahyuningtyas, A., & Marvie, I. (2024). Pengaruh konsentrasi ragi instan dan lama waktu organoleptik *Tapai* ubi talas. *Communication in Food Science and Technology*, *3*(1), 24–30. https://doi.org/10.35472/cfst.v3i1.1929

Hidayat, N., & Sulaeman, A. (2010). *Teknologi fermentasi*. Universitas Brawijaya Press.

Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan matematika: Aplikasi dan terapannya*. Graha Ilmu.

Laela, N., Nisa, F. H., Purwosutanto, R., Hayati, N., & Wijayanti, E. D. (2023). Fermentasi tape singkong sebagai model pembelajaran biokimia kontekstual: Transformasi karbohidrat menjadi etanol. *Jurnal Pendidikan Tambusai*, *7*(3).

Lestari, D., & Mustakim, A. (2025). Analisis mikrobiologi *Saccharomyces cerevisiae* dan perannya dalam fermentasi tape singkong *Manihot utilissima*. *Konstanta: Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, *3*(2), 166–171. https://doi.org/10.59581/konstanta.v3i2.5285

Manik, R. M., Tarigan, K., & Lubis, S. N. (2021). Analisis usaha tape singkong di Desa Kolam Kecamatan Percut Sei Tuan Kabupaten Deli Serdang. *Jurnal Agriuma*, *3*(1).

Muchtadi, T. R., & Sugiyono. (2013). *Prinsip proses dan teknologi pangan*. Alfabeta.

Nurjannah, & Nurhikmah. (2020). Pengaruh konsentrasi ragi dan lama fermentasi terhadap mutu tape singkong (*Manihot esculenta* Crantz). *Jurnal Borneo Saintek*, *3*(2), 73–78.

Rahmawati, R., Mualimah, I., Tyarini, E. B., & Aryati, D. A. (2026). Profil karakteristik organoleptik *Tapai* singkong (*Manihot esculenta*): Analisis rasa, tekstur dan aroma pada berbagai variasi konsentrasi ragi. *JURNAL BIOSHELL*, *15*(1), 157–165. https://doi.org/10.56013/bio.v15i1.5502

Refliana, R., Pertiwi, S. R. R., & Kusumaningrum, I. (2025). Fermentasi tepung singkong sebagai strategi peningkatan sifat fisikokimia dan nilai fungsional pangan lokal. *Karimah Tauhid*, *4*(12). https://doi.org/10.30997/karimahtauhid.v4i12.22140

Rofi'i, A., Purnomo, F. E., & Afriansyah, F. L. (2022). Pemodelan matematika fermentasi alkohol pada tape singkong dengan monitoring technology temperature and fermentation controlled chamber (TFCC). *Jurnal Ilmiah Inovasi*, *22*(3), 277–285.

Sahratullah, Jekti, D. S. D., & Zulkifli, L. (2017). Pengaruh konsentrasi ragi dan lama fermentasi terhadap kadar air, glukosa dan organoleptik pada tape singkong. *Jurnal Biologi Tropis*, *17*(1), 43–52. https://doi.org/10.29303/jbt.v17i1.392

Saputri, R. D., Susanti, H., & Wahyuningsih, S. (2020). Analisis pendapatan usaha tape singkong di Kelurahan Kandri Kecamatan Gunungpati Kota Semarang. *Jurnal Ekonomi Pertanian dan Agribisnis*, *4*(2), 287–295.

Sevina, R., Anggraini, A., Anggraini, R., Emanauli, & Fiardilla, F. (2025). Pengaruh konsentrasi ragi terhadap kualitas sensori pada fermentasi *Tapai* singkong dan *Tapai* ketan. *JURAGAN: Jurnal Agroteknologi*, *3*(2). https://doi.org/10.58794/juragan.v3i2.1425

Simbolon, S. S. N., Sinaga, J. A. B., & Sirait, D. E. (2023). Implementasi persamaan diferensial model logistik untuk memprediksi tingkat pertumbuhan kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar. *Attractive: Innovative Education Journal*, *5*(3).

Susanto, A., & Rudianto, B. (2020). Kestabilan titik keseimbangan model dua pemangsa satu mangsa dengan kriteria Routh-Hurwitz. *Jurnal Matematika dan Penerapannya (MAp Journal)*, *Program Studi Matematika FST UIN Imam Bonjol Padang*. (Diterima Mei 2020; Diterbitkan Juni 2020).

Syarumsyah, H., Alhafidz, H., & Marwati, M. (2021). Karakteristik organoleptik dan kimia tape singkong (*Manihot esculenta*) varietas mentega dengan pra-perendaman dalam sari buah nangka. *Jurnal Teknologi dan Agroindustri*, *2*(2), 90–96. https://doi.org/10.35941/jtaf.2.2.2020.4121.90-96

Tim Polygon. (2025). Analisis pertumbuhan mikroorganisme selama fermentasi *Tapai* singkong. *POLYGON: Jurnal Ilmu Pengetahuan*, *3*(5).

Winarno, F. G. (2004). *Kimia pangan dan gizi*. PT Gramedia Pustaka Utama.

Yulia, I., Putra, A., Fitri, W. E., & Eka Putri, G. (2024). Selection and in-vitro potentials of amylolytic yeast from several ragi *Tapai* in West Sumatra Province. *Bioscientist: Jurnal Ilmiah Biologi*, *11*(1). https://doi.org/10.33394/bioscientist.v11i1.6924